

## DE LA PRUEBA DEL 9

Obrar es fácil, pensar es difícil; obrar  
según se piensa es aún más difícil.  
Goethe

Recuerdo, de mi época de estudiante de educación primaria, cuando estaba aprendiendo a manejar los algoritmos de la multiplicación y la división entera por defecto de números naturales, que la monja/maestro, para corregirnos las *cuentas*, trazaba en un papel un par de líneas rectas que se cortaban, formando como un aspa. A continuación, empezaba a comentar algo para sí y después apuntaba una cifra en uno de los ángulos, y seguía haciendo lo mismo hasta que colocaba eso, una cifra, en cada uno de los cuatro ángulos que allí había. La prueba del nueve, decían que hacía, y parecía que con ella decidía si el resultado de aquellas operaciones que habíamos hecho era correcto o no. El caso es que la tal prueba a mí me tenía alucinado. No comprendía cómo se podía saber con aquella celeridad si aquello estaba bien o mal, más con el trabajo que me costaba resolver aquel tipo de operaciones y el tiempo que en ello echaba.

También, recuerdo haber preguntado en aquella época a amigos y conocidos cómo se aplicaba aquel test de calidad, pero, aunque todo el mundo lo conocía de nombre, nadie de mi entorno parecía estar en el secreto de su aplicación. No recuerdo haber preguntado nunca a ninguno de mis maestros/monjas sobre la famosa prueba; consideraba peligroso hacerlo, ya que, aunque nunca nadie nos había puesto en el secreto de su aplicación, igual había que estar en él y con la pregunta descubría mi ignorancia; y, precisamente, por ignorar tal conocimiento, cabía la posibilidad de recibir un cero, una buena reprimenda y quedar castigado hasta las dos. Así que nunca me atreví a preguntar a las altas instancias por aquello. Y fueron pasando los cursos, fui desinteresándome por la dichosa prueba y con el tiempo me olvidé de ella.

Todo iba sobre ruedas hasta el verano pasado, en que un conocido mío, en una tertulia donde salieron a relucir cosas de nuestra infancia, me hizo la gran pregunta:

-¿"Acuérdate de qu' había un método pa saber rápidamente si una multiplicación o una división taba bien fecha?"

- "Sí, la prueba 'l nueve." -le dije.

- "¿Cómo se hacía?" -me preguntó.

- "Non sé, además, nunca supe." -respondí.

- "¿Qué ye, qu' ahora pa ser *profe* Matemáticas non fai falta saber la prueba 'l nueve?" -me soltó con cachondeo.

- "Ya ves cómo ta 'l mundu." -le contesté, sin más explicaciones.

Y después de aquel largo intervalo de años de haber vivido feliz, sin haberme acordado para nada de ella, volvió a salir a relucir la innominable. Y decidí que tenía que enterarme de una vez cómo se aplicaba la diabólica prueba, ya no valía disculpa ninguna. Así que empecé la investigación intentando localizar bibliografía sobre el tema y no encontré ninguna; recurrí a Internet y tampoco encontré nada que sirviera a mis propósitos; y pregunté a profesores que conocía, pero nadie me solucionó la cuestión, el caso es que todos la habían visto aplicar en su infancia, e incluso decían haber sabido en su momento utilizarla, pero era una cuestión que había pasado al olvido por su falta de aplicación en el nivel de las Matemáticas que en los institutos tenemos que enseñar.

Después de un tiempo de pesquisas infructuosas, me acordé de un amigo mío que estaba jubilado de maestro. Él seguro que sí sabría, pensé; el problema era que por aquella época no nos veíamos mucho. Y pasó una larga temporada hasta que

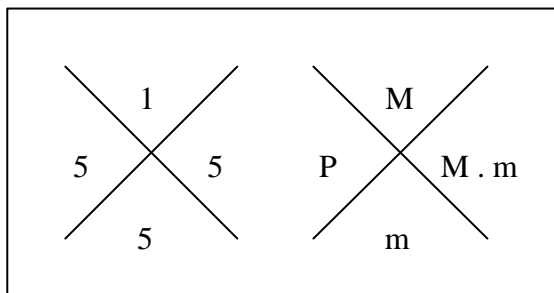
coincidimos en una sidrería a la que habíamos acudido a ver el fútbol por la *tele*. Cuando acabó el partido, le pregunté por el asunto e inmediatamente cogió una servilleta de papel del bar, sacó un bolígrafo y puso allí, sobre la marcha, una multiplicación, que efectuó. Inmediatamente, trazó el aspa de marras y empezó con el mecanismo de la archifamosa prueba, mientras me iba explicando lo que iba haciendo. Finalizada ésta, cogió otra servilleta e hizo todo el proceso con una división. Y cuando acabó le dije con satisfacción:

- "¡Por fin!, non sabes los años que me costó enterame d' esto. Menudu pesu que m' acabas quitar d' enriba."

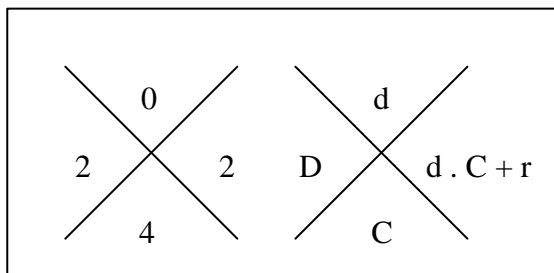
Y con aquello quedó satisfecha mí curiosidad -de momento, luego se verá que no, que el asunto tenía su miga-.

Los ejemplos que puso fueron uno de multiplicar y otro de dividir:

$$\begin{array}{r} 257833 \\ \times 59 \\ \hline 2320497 \\ 1289165 \\ \hline 15212147 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 74309816 \\ 1670 \\ 5189 \\ 00581 \\ 0056 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 576 \\ \hline 12901 \end{array}$$



Y lo que hizo y me fue explicando fue:

En la multiplicación:

$$P = 15212147 \equiv 1+5+2+1+2+1+4+7 = 23 \equiv 2+3 = 5$$

$$M = 257833 \equiv 2+5+7+8+3+3 = 28 \equiv 2+8 = 10 \equiv 1+0 = 1$$

$$m = 59 \equiv 5+9 = 14 \equiv 1+4 = 5$$

Y como en toda multiplicación Producto (P) = Multiplicando (M) x Multiplicador (m), apuntó en el ángulo izquierdo 5, correspondiente a P; en el superior 1, correspondiente a M; en el inferior 5, correspondiente a m; y en el derecho 5, correspondiente a M . m. Y como el número que escribió en los ángulos izquierdo y derecho coincidían (P = M . m), dio la multiplicación como bien hecha.

En la división:

$$D = 74309816 \equiv 7+4+3+0+9+8+1+6 = 38 \equiv 3+8 = 11 \equiv 1+1 = 2$$

$$d = 576 \equiv 5+7+6 = 18 \equiv 1+8 = 9 \equiv 0$$

$$C = 12901 \equiv 1+2+9+0+1 = 13 \equiv 1+3 = 4$$

$$r = 56 \equiv 5+6 = 11 \equiv 1+1 = 2$$

(Entendiendo el símbolo  $\bullet$ , en este caso, como : "dejan el mismo resto al dividirlos entre 9")

Teniendo en cuenta que Dividendo (D) = Divisor (d) x Cociente (C) + Resto (r), escribió 2 en el ángulo izquierdo, correspondiente a D; en el superior 0, correspondiente a d; 4 en el inferior, correspondiente a C; y 2 en el derecho, correspondiente a  $d \cdot C + r$ . Y también coincidían los números que había escrito en los ángulos izquierdo y derecho ( $D = d \cdot C + r$ ), así que dio como bien hecha la operación.

¡Acabáramos! Al cabo de los años me había enterado de cuál era el mecanismo de la requetefamosa y muy ponderada prueba del nueve.

Aquella tarde-noche en el *chigre* no dio más de sí, se hizo tarde y nos tuvimos que marchar a casa. La verdad es que ya me había enterado de cómo funcionaba aquello, sólo que no sabía por qué se sumaban las cifras de los números, entre otras cosas. Iba pensando en ello cuando me retiraba y, de repente, me acordé de que el resto de dividir cualquier número natural entre 9 es igual que la suma iterada<sup>1</sup> de sus cifras, hasta que esta suma sea menor que 9. "Per ehí deben dir los tiros" -pensé-, e inmediatamente empaté: "Claro, per eso-y llaman la prueba 'l nueve. ¡Bingo!"

Cuando subía en el ascensor hacía casa iba contento, pero sólo hasta cierto punto, ya que en ese momento conocía el procedimiento, pero no su fundamento. Y me propuse intentar demostrarlo en cuanto tuviese tiempo disponible.

El sábado siguiente hacía un tiempo horrible, así que decidí no salir y ponerme con la labor que me había propuesto. La primera cuestión era demostrar por qué el resto de dividir un número natural entre 9 es igual que la suma iterada de sus cifras, hasta que esta suma sea menor que 9. Por otra parte, al aplicar la prueba, en vez de multiplicar  $M \cdot m \text{ ó } d \cdot C$  se multiplicaban los restos de dividir M y m entre 9 y lo mismo para d y C. También, pasaba lo mismo cuando operaba  $d \cdot C + r$ . ¿Por qué pegaba ese cambio? ¿Era correcto? Si lo era tenía que demostrarlo, así que empecé:

### Proposición 1

El resto de dividir un número natural entre 9 es igual que el resto de dividir entre 9 la suma de sus cifras.

#### DEMOSTRACIÓN

(n)  
Sea  $z = abc\dots tuv \in \mathbf{N}$ ;  $n \in \mathbf{N}^*$ ;  $a, b, c, \dots, t, u, v \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Al dividir z entre 9

$$z = 9 \cdot C + r, \text{ con } C \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{N} / r < 9 \quad (\text{I})$$

Por otra parte, descomponiendo z polinómicamente

$$z = a \cdot 10^{n-1} + b \cdot 10^{n-2} + c \cdot 10^{n-3} + \dots + t \cdot 10^2 + u \cdot 10^1 + v \cdot 10^0 =$$

$$= \overset{(n-1)}{(99\dots 9 \cdot a + a)} + \overset{(n-2)}{(99\dots 9 \cdot b + b)} + \overset{(n-3)}{(99\dots 9 \cdot c + c)} + \dots + (99 \cdot t + t) + (9 \cdot u + u) + v =$$

$$\begin{aligned}
&= \overset{(n-1)}{(99\dots 9)} \cdot a + \overset{(n-2)}{99\dots 9} \cdot b + \overset{(n-3)}{99\dots 9} \cdot c + \dots + 99 \cdot t + 9 \cdot u + a + b + c + \dots + t + u + v = \\
&= 9 \cdot (\overset{(n-1)}{11\dots 1} \cdot a + \overset{(n-2)}{11\dots 1} \cdot b + \overset{(n-3)}{11\dots 1} \cdot c + \dots + 11 \cdot t + u) + a + b + c + \dots + t + u + v
\end{aligned}$$

Para simplificar, llamamos

$$p = 11\dots 1 \cdot a + 11\dots 1 \cdot b + 11\dots 1 \cdot c + \dots + 11 \cdot t + u \in \mathbf{N}$$

$$s = a + b + c + \dots + t + u + v \in \mathbf{N}$$

con lo que

$$z = 9 \cdot p + s \quad (\text{II})$$

De (I) y (II):

$$9 \cdot C + r = 9 \cdot p + s \Rightarrow 9 \cdot (C - p) = s - r$$

$$\text{y llamando } C - p = n_1 \in \mathbf{N} \Rightarrow s - r = 9n_1$$

$$s = 9n_1 + r \quad \text{c.q.d.}$$

### Consecuencias

$$1) \text{ Si } s < 9 \Rightarrow n_1 = 0 \wedge s = r = a + b + c + \dots + t + u + v$$

Si la suma de las cifras que componen un número es menor que 9, esa suma será el resto de dividir dicho número entre 9.

$$2) \text{ Si } s = 9 \Rightarrow n_1 = 1 \wedge r = 0$$

Si la suma de las cifras que componen un número es igual a 9, el resto de dividir dicho número entre 9 es 0.

$$3) \text{ Si } s > 9 \Rightarrow s' = 9n_2 + r, \text{ con } n_2 \in \mathbf{N}. \text{ Siendo } s = \alpha\beta\dots\upsilon v \wedge s' = \alpha + \beta + \dots + \upsilon + v$$

Si la suma (s) de las cifras que componen un número es mayor que 9, se suman las cifras de s y las de las siguientes sumas (s', s''...) que resulten de repetir el proceso, en su caso, hasta que dicha suma sea menor o igual que 9. Entonces, se aplica la consecuencia 1 ó 2.

### Corolario<sup>2</sup>

Dados  $z_1, z_2 \in \mathbf{N}$ , si la suma iterada de las cifras de  $z_1$  y  $z_2$  son iguales, también lo son los restos de dividir  $z_1$  y  $z_2$  entre 9.

La demostración es trivial.

### Proposición 2

Si  $r'$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son los restos de dividir  $x + y$ ,  $x$  e  $y$  entre 9, respectivamente, el resto de dividir  $r_1 + r_2$  entre 9 es igual a  $r'$ .

## DEMOSTRACIÓN

Sean  $x, y \in \mathbf{N}$

Al dividir  $x + y$  entre 9

$$x + y = 9 \cdot C' + r', \text{ con } C' \in \mathbf{N}; r' \in \mathbf{N} / r' < 9 \quad (\text{III})$$

Al dividir  $x$  e  $y$  entre 9:

$$x = 9 \cdot C_1 + r_1, \text{ con } C_1 \in \mathbf{N}; r_1 \in \mathbf{N} / r_1 < 9$$

$$y = 9 \cdot C_2 + r_2, \text{ con } C_2 \in \mathbf{N}; r_2 \in \mathbf{N} / r_2 < 9$$

Sumando miembro a miembro estas dos últimas igualdades y sacando el 9 como factor común

$$x + y = 9 \cdot (C_1 + C_2) + r_1 + r_2 \quad (\text{IV})$$

De (III) y (IV):

$$9 \cdot C' + r' = 9 \cdot (C_1 + C_2) + r_1 + r_2$$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 = 9 \cdot [C' - (C_1 + C_2)] + r'$$

Y como  $r_1 + r_2 \geq r' \Rightarrow C' - (C_1 + C_2) = n' \in \mathbf{N}$

$$r_1 + r_2 = 9 \cdot n' + r' \quad \text{c.q.d.}$$

### Proposición 3

Si  $r''$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son los restos de dividir  $x \cdot y$ ,  $x$  e  $y$  entre 9, respectivamente, el resto de dividir  $r_1 \cdot r_2$  entre 9 es igual a  $r''$ .

## DEMOSTRACIÓN

Sean  $x, y \in \mathbf{N}$

Al dividir  $x \cdot y$  entre 9

$$x \cdot y = 9 \cdot C'' + r'', \text{ con } C'' \in \mathbf{N}; r'' \in \mathbf{N} / r'' < 9 \quad (\text{V})$$

Al dividir  $x$  e  $y$  entre 9

$$x = 9 \cdot C_1 + r_1, \text{ con } C_1 \in \mathbf{N}; r_1 \in \mathbf{N} / r_1 < 9$$

$$y = 9 \cdot C_2 + r_2, \text{ con } C_2 \in \mathbf{N}; r_2 \in \mathbf{N} / r_2 < 9$$

Multiplicando miembro a miembro estas dos últimas igualdades

$$x \cdot y = 81C_1 \cdot C_2 + 9C_1 \cdot r_2 + 9C_2 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2$$

Sacando el 9 como factor común

$$x \cdot y = 9.(9C_1.C_2 + C_1.r_2 + C_2.r_1) + r_1 \cdot r_2 \quad (\text{VI})$$

De (V) y (VI):

$$\begin{aligned} 9.C'' + r'' &= 9.(9C_1.C_2 + C_1.r_2 + C_2.r_1) + r_1 \cdot r_2 \\ \Rightarrow r_1 \cdot r_2 &= 9.[C'' - (9C_1.C_2 + C_1.r_2 + C_2.r_1)] + r'' \end{aligned}$$

Y como  $r_1 \cdot r_2 \geq r'' \Rightarrow C'' - (9C_1.C_2 + C_1.r_2 + C_2.r_1) = n'' \in \mathbf{N}$

$$\mathbf{r_1 \cdot r_2 = 9 \cdot n'' + r''} \quad \text{c.q.d.}$$

Y, con todo esto, quedaban disipadas mis dudas anteriores, pero, llegado a este punto, me surgieron las dos preguntas definitivas: ¿Es aplicable la prueba a todos los casos? ¿En caso de que lo sea, podemos saber, sin lugar a dudas, aplicándola, si la operación correspondiente está bien hecha?

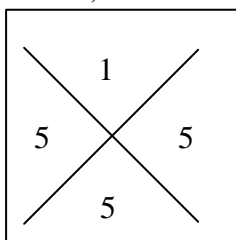
A la primera pregunta se puede contestar afirmativamente, ya que las condiciones de las demostraciones incluyen a todos los números naturales, en cualquier circunstancia, para las operaciones de multiplicar y dividir.

A la segunda pregunta no se puede contestar afirmativamente, como se deduce del corolario de la proposición 1. Veámoslo con unos ejemplos: volvamos con la multiplicación y la división a las que hemos aplicado la prueba anteriormente y que la verificaron:

En el caso de la multiplicación

$$257833 \times 59 = 15212147$$

Supongamos que nos confundimos, alteramos el orden de dos cifras del producto, escribimos 15122147 en vez del anterior y aplicamos la prueba:

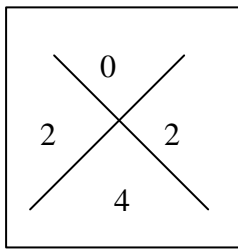


Es decir, la verifica, pero el producto no es el correcto. Lo mismo ocurriría si damos como producto 57111242 o cualquier otro número en que la suma iterada de sus cifras fuese 5, y esto aunque no contuviese las mismas cifras. Por ejemplo, un número tan distinto del verdadero producto como 1610672 también pasaría la prueba.

En el caso de la división

$$D = 74309816; d = 576; C = 12901; r = 56$$

Si alteramos el orden de las cifras del resto, quedaría  $r = 65$ . Aplicando la prueba:



también la verifica, aunque el resto no es el correcto. Hay infinidad de formas erróneas con las que también se verificaría. Por ejemplo, si damos como cociente 3547 y como resto 173, que no tienen nada que ver con los correctos, también pasarían la prueba. Lo harían cualquier cociente (C) y cualquier resto (r) que cumplieren:  $d. C' + r' \equiv d. C + r$ .

En consecuencia:

Si una multiplicación o una división no verifican la prueba del 9, no están correctamente efectuadas estas operaciones. Luego, la condición de que la verifiquen es necesaria.

Si una multiplicación o una división verifican la prueba del 9, no queda garantizado que estén correctamente efectuadas. Luego, la condición de que la verifiquen no es suficiente.

"¡Pues, vaya! ¡Menudu chascu!" -me dije-. Y me empecé a deprimir. No es extraño, al cabo de una pila de años me había enterado del mecanismo de aplicación de la mitificada, al menos por mí, prueba del nueve, había profundizado en la cuestión y la conclusión a que había llegado era que no era irrefutable su sentencia. Y, claro, esta circunstancia empezó a tener sus repercusiones: "¿Si non pueo fiame de la prueba l' nueve, cómo voi facelo de la prueba l' algodón, qu' é más chapucera y gocha?" -me pregunté-. Y me convertí en un escéptico.

No obstante, de aquella *depre* me recuperé rápidamente. "Non hai mal que por bien non venga" -pensé para mí-. "Pue haber pasáu que la non irrefutabilidad de la prueba hubiera síu beneficiosa n' alguna ocasión pa nosotros, los escolinos d' aquella época, al danos como bien feches algunes multiplicaciones o divisiones nes que nos hubiéramos confundíu. É posible que pol su concursu e intermediación nos hayamos llibráu de daqué castigu, poxicón o regañadiella. ¿Quién hubiera dichu d' aquella que taba siendo una pergrande benefactora del sufríu personal discente?"

Y aprovecho la circunstancia anterior para pedir que se erija un monumento a "La Prueba del 9", y un buen sitio para hacerlo sería "La Plaza de los Recuerdos".

## Reflexiones y aclaraciones

Cuando se empieza con alguna cuestión, por sencilla que ésta parezca, siempre se lían las cosas, y lo que parece que se puede solventar rápidamente suele complicarse; y así me pasó con este asunto de la prueba del nueve. Empecé, como digo, un sábado de viento y lluvia, y para el domingo a mediodía ya tenía escrito el borrador, que dejé reposar para volver a leerlo al cabo de unos días con otra perspectiva. El jueves siguiente pasé una copia a dos compañeras de departamento para ver qué opinaban sobre lo que había escrito y por aquello de que varios pares de ojos ven más que un solo par. El domingo por la tarde me di cuenta de que uno de los supuestos que había hecho no era correcto y lo rectifiqué. Al cabo de unos días, mis compañeras me aclaran y puntualizan unas cuestiones que tenía bastante liadas -el enunciado de la proposición 1 era farragoso e impreciso, no era correcto; en otro lugar utilizaba un símbolo demasiado alegremente, lo que podía dar lugar a confusión-.

Por otra parte, para simplificar los enunciados había empezado a formularlos por otra vía, pero, en este caso, tenía que introducir una definición -la congruencia (módulo  $m$ )-; con esto ganaba en sencillez al formular las proposiciones, efectivamente, pero introducía una cuestión que no habían estudiado nuestros alumnos, a quienes, en definitiva, va destinado todo esto; consulté a una compañera y no me recomendó que lo tratase de esa manera. También, en algún momento estuve tentado de montar todo esto para la multiplicación y división de números enteros, pero mi propósito inicial no iba por ese camino, así que lo desestimé. Por aquel entonces me había atacado la duda y el desánimo, y me apeteció abandonar. Durante los dos o tres días siguientes fui recuperando poco a poco el ánimo, volví a ponerme con el tema durante aquel fin de semana y lo di por concluido. Al otro sábado, lo volví a leer y le saqué algún defecto de redacción, que rectifiqué, y el lunes siguiente por la mañana, mientras iba hacia el instituto, decidí que tenía que hacer estas aclaraciones, ya que podía dar la impresión de que sacar a la luz este escrito había sido como coser y cantar, y no me parecía educativo.

Quiero comunicar con todo esto, sin que se relacione ello con moraleja de ningún tipo, que no es frecuente que algo, que no sea lluvia, granizo o nieve, nos venga caído del cielo; que cualquier trabajo necesita que se le dedique tiempo y esfuerzo personal; que el trabajo suele ir acompañado de confusiones -o fracasos- y vuelta a empezar; y que, aunque el desánimo nos asalte a veces, hay que recuperarse y seguir avanzando con lo que nos propusimos.

En otro orden de cosas, no fue nunca mi propósito que me saliese tan largo y complicado esto. Cuando empecé a prepararlo para este destino, pensaba que iría a ser más liviano y apropiado como lectura para alumnos de ESO. No salió así, obviamente, pero no encontré la forma de presentarlo más sencillo y con cierto rigor. En descargo, pienso que tiene varios niveles de lectura, desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato. En todo caso, los lectores diréis.

**Carlos Fernández Martínez**  
**(Profesor de Matemáticas)**

1 **Iterar.** Repetir.

2 **Corolario.** Proposición que se deduce fácilmente de lo demostrado antes.