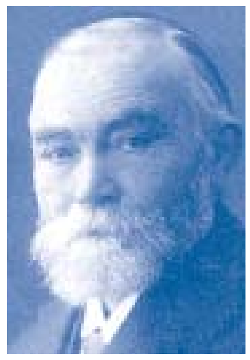
UN PUZZLE AXIOMÁTICO

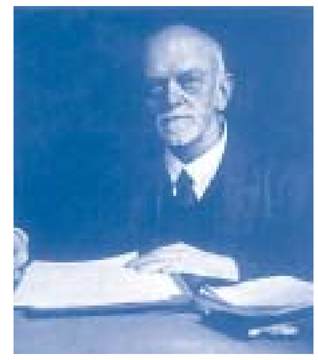
Después de más de 2.500 años de crecimiento continuo en su saber, los matemáticos de finales del siglo XIX y comienzos del XX entraron en una fase muy particular de reflexión sobre lo que las matemáticas 'eran realmente'. Comenzaron una introspección crítica de su saber para determinar qué estructura tenía la matemática, cuáles eran sus fundamentos o cuál era el alcance de este campo del saber. Conozcamos primero la estructura *axiomática* de la matemática, para conocer posteriormente la crisis de sus fundamentos.

por Lolita Brain



Gottlob Frege (1848-1925)

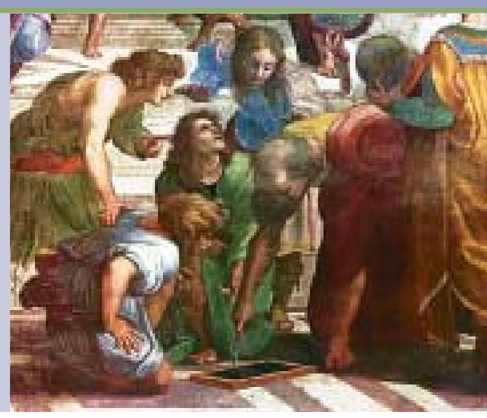
Gottlob Frege fue el primer matemático que se tomó en serio la necesidad de conocer el alcance lógico de las matemáticas, es decir, quiso conocer la respuesta a la pregunta ¿pueden las matemáticas reducirse a pura lógica? Su empeño lo desarrolló en la formalización de la aritmética, creando una **teoría intuitiva** de conjuntos que, ironías de la historia, resultó no ser correcta una vez que Frege la hubo acabado. David Hilbert, de ideas muy contrarias a las de Frege, con el que mantuvo una correpondencia científica muy disputada, fue defensor también de la *axiomatización* de las matemáticas, aunque su espíritu era más abierto y ambicioso, si bien algo altivo, que el del solitario y huraño Frege.



David Hilbert (1862-1943)

¿Qué es una teoría AXIOMÁTICA?

La axiomatización de una teoría fue estudiada por Aristóteles y perfectamente plasmada en la concepción de la Geometría de Euclides que nos legó en su libro *Los Elementos*. Según esta forma clásica, una teoría axiomática sobre una realidad es aquella que se organiza alrededor de un conjunto de conceptos primitivos de verdades de las que se obtienen los restantes conceptos. Además existen los axiomas, unas pocas verdades generales que se aceptan como verdaderas y que no requieren ser demostradas. Todas las afirmaciones de la teoría deben estar basadas en los conceptos y los axiomas y deben deducirse de ellos. Éste era el modelo de teoría axiomática de Frege.

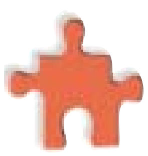


Euclides (fragmento de 'La escuela de Atenas', de Rafael de Sanzio)

Los ***Elementos*** de Euclides desarrollan todo el conocimiento geométrico de su época bajo una estructura axiomática, la primera de la historia. Su teoría permaneció casi sin variación hasta finales del siglo XIX. Las reglas de la Geometría fueron durante todo ese tiempo las que se recogieron en su libro. Si imaginamos la geometría -como cualquier otra parte de las matemáticas- como un gran puzzle podemos comprender el papel que juega cada elemento -axiomas, teoremas- en su desarrollo.

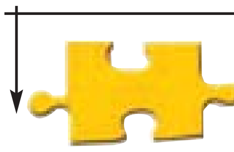
Definición 1. *Un punto es lo que no tiene partes.*

Definición 12. *Un ángulo agudo es el ángulo menor de un recto.*



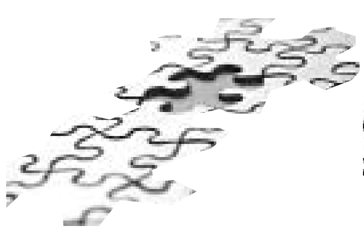
Axioma 1. *Dados dos puntos cualesquiera se puede trazar una recta que los una.*

Axioma 1. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*



Axioma 5. *Por un punto exterior a una recta puede trazarse una y sólo una recta paralela a la dada.*

Las piezas del puzzle son los axiomas y los conceptos principales las definiciones, como las llamaba Euclides. Observa qué simples son.

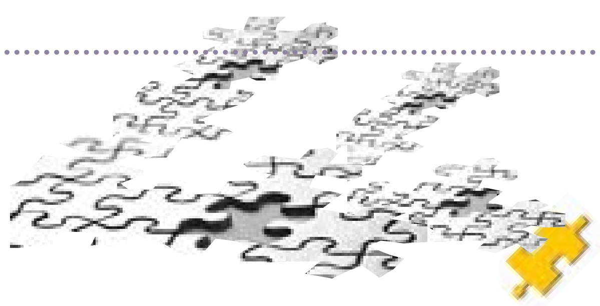


teorema. *Los ángulos de lados paralelos son iguales.*

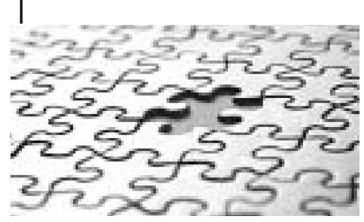
teorema. *En un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales.*

Los axiomas y definiciones se 'mezclan' para producir otras verdades de la teoría: los teoremas.

Algunos teoremas son muy importantes y pasan a engrosar los fundamentos de la teoría.



Los teoremas obtenidos se combinan entre sí para producir nuevos teoremas sobre la geometría.



La Geometría pasa a ser el conjunto de verdades -teoremas- que son ciertas a partir de estas reglas de construcción. Toda verdad que se deduzca de estas reglas del juego debe aceptarse como verdadera.

Para que no te líes

Axioma: las verdades de una teoría aceptadas sin demostración.

Teorema: las verdades deducidas a partir de los axiomas y de otros teoremas previos.

Postulado: sinónimo de axioma. Usado por Euclides.

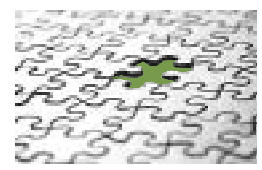
Concepto primario: los conceptos mínimos para construir la teoría.

Corolario: una verdad que se deduce trivialmente de un teorema.

Proposición: verdad de rango menor que teorema.

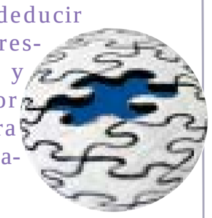
Lema: teorema utilizado para demostrar la verdad de otro teorema.

A pesar de la aparente rigidez de un sistema axiomático, la libertad de cambiar, eliminar o agregar axiomas es total para el matemático. Otra cosa es que esos cambios permitan *generar* la teoría sin errores y que tenga un alcance similar al de la teoría original. Una pieza puede cambiar por completo el puzzle final. Esa pieza puede ser el Axioma V de Euclides. De los axiomas de Euclides, el quinto fue siempre controvertido. A pesar de la aparente evidencia que refleja durante siglos, se pensó que podía ser un teorema y no un axioma, es decir, que se podía deducir de los restantes y que por tanto era innecesario.



1 paralela = Euclides Plano

Infinitas paralelas = Lobachesky Seudoesfera



Ninguna paralela = Riemann Esfera

A finales del siglo XIX y de modo independiente, Lobachevsky, Bolyai, y Riemann se cuestionaron qué sucedería si de los axiomas de Euclides cambiamos el quinto postulado y mantenemos los restantes. ¿Sería posible que este nuevo sistema de axiomas también explicara la geometría? ¿sería una teoría absurda o, por lo contrario, sólo otra forma de entender la geometría? Sus respuestas fueron asombrosas.

Para Bolyai y Lobachesky, el quinto postulado debía formularse diciendo que *se pueden trazar infinitas rectas paralelas por ese punto exterior.* Para Riemann, el axioma decía que *por un punto exterior a una recta no es posible trazar ninguna recta paralela a la dada.* Y a patir de estos cambios contrarios a la intuición, desarrollaron teoremas análogos a los deducidos por Euclides... y no se encontró ninguna contradicción. Eran modelos correctos de geometría. Es más, encontraron *modelos de mundos* en los que sus axiomas se cumplían. Para la Geometría Hiperbólica de Lobachesky, el mundo es de forma seudoesférica. Para la Geometría Riemanniana, es una esfera.

lolitabrain@hotmail.com