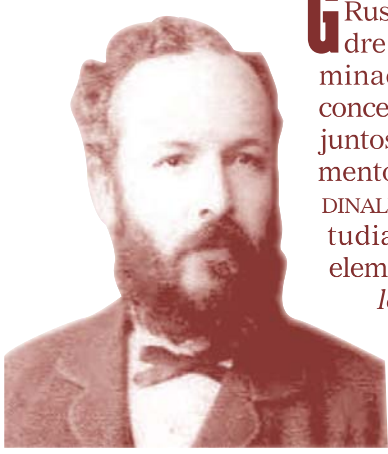
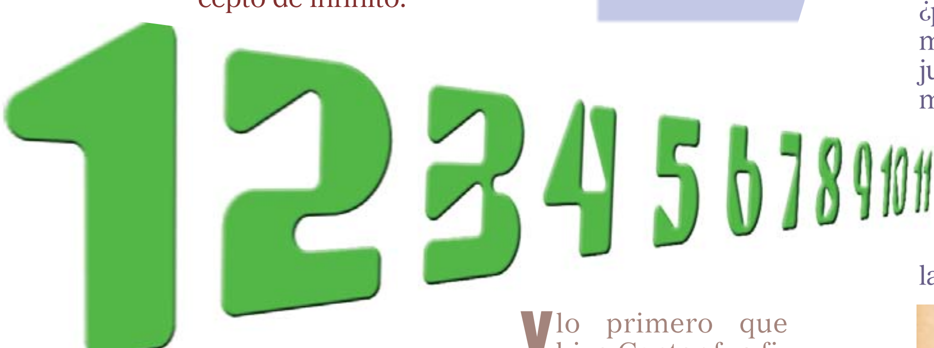
...UNO, DOS, TRES...INFINITO

La idea de infinito ha sido siempre uno de los temas de mayor discusión en el seno de las Matemáticas... y no sólo en ellas. La Filosofía ya desde los remotos tiempos de la Grecia clásica discutió sobre el concepto de infinito, su significado y su existencia. Ya ZENÓN DE ELÉA, 400 años antes de Cristo, sembró el pensamiento con curiosas paradojas que tienen como eje central el infinito. Hasta finales del siglo XIX, no se abordó con rigor matemático el análisis de lo que significaba este concepto. Se encontraron sorpresas inimaginables que dividieron el mundo de las Matemáticas. Hablamos de la obra de George Cantor.

por Lolita Brain



George Cantor (1845 San Petersburgo, Rusia -1918 Halle, Alemania) es el padre de la Teoría de Conjuntos, denominada *intuitiva*. Tras desarrollar los conceptos que hoy usamos sobre los conjuntos, se interesó por el número de elementos de éstos, lo que se llama la CARDINALIDAD del conjunto. Y comenzó a estudiar los conjuntos con infinitos elementos hasta desarrollar la *Teoría de los Números Transfinitos*, una de las teorías más desafiantes para el pensamiento humano, comparable al desafío intelectual de las *Geometrías no Euclídeas -en relación al espacio-* o de la *Relatividad* -en relación con el tiempo y el espacio-. Su teoría desafiaba el concepto de infinito.

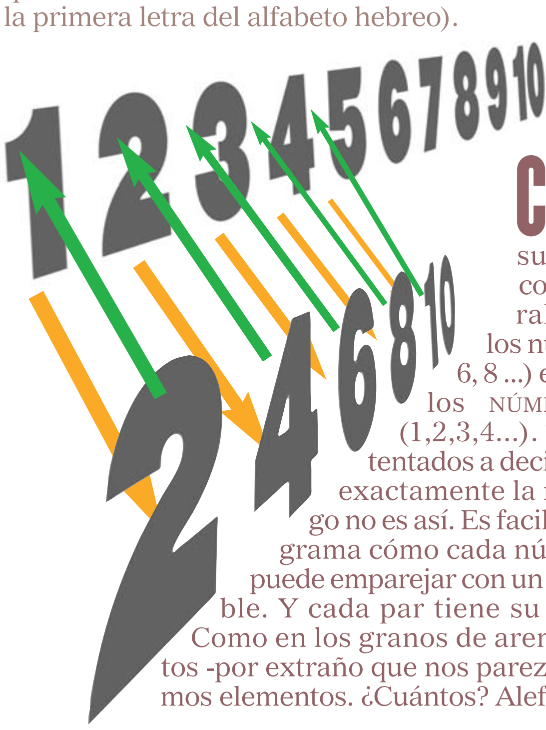


Y lo primero que hizo Cantor fue fijarse en el CONJUNTO INFINITO del que se tiene la primera intuición: el conjunto de los números naturales o enteros positivos, es decir, los números de contar 1, 2, 3, 4, ...

Todos entendemos que este conjunto es infinito. Cada número tiene su sucesor. Es su esencia. Cantor afirmó que no existe ningún conjunto infinito con menos elementos que éste. Dicho de otro modo, los números de contar son el conjunto infinito más pequeño. Al número de sus elementos le llamó ALEF CERO (Alef es la primera letra del alfabeto hebreo).

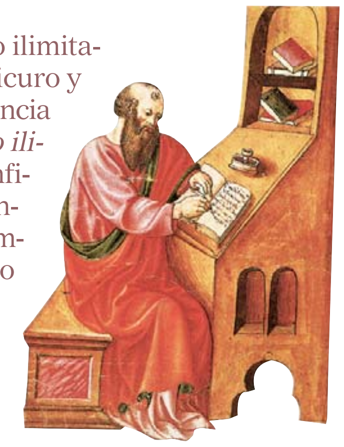
$\aleph_0$

ALEF CERO



Cantor comenzó entonces a estudiar algunas *partes* -subconjuntos- del conjunto de los naturales. Por ejemplo, los números PARES (2, 4, 6, 8 ...) están *contenidos* en los NÚMEROS DE CONTAR (1,2,3,4...). Todos estaríamos tentados a decir que los pares son exactamente la mitad. Sin embargo no es así. Es facilísimo ver en el diagrama cómo cada número de contar se puede emparejar con un número par, su doble. Y cada par tiene su pareja, su mitad. Como en los granos de arena, ambos conjuntos -por extraño que nos parezca- tienen los mismos elementos. ¿Cuántos? Alef-cero elementos.

Durante siglos los griegos exploraron el *apeiron* -lo ilimitado- y su presencia en el universo. Demócrito, Epicuro y sobre todo Lucrecio, fueron defensores de la existencia de lo infinito. Lucrecio llegó a hablar de "*un número ilimitado de mundos infinitos*". Aristóteles definió un infinito *en potencia*, que se piensa como algo finito en continua expansión, pero que no se puede alcanzar. En cambio, entiende que no puede existir realmente un infinito *en acto*, que pueda ser pensado, ya que al ser *inconcluso* -no acaba nunca- no puede definirse.



RICHARD DEDEKING
1831 Alemania - 1916 Alemania

Richard Dedeking, un matemático solitario y tímido, pero muy riguroso, fue el padre de los números tal y como los conocemos hoy, creando una teoría que *construye* los números naturales, y con ellos todos los demás. Amigo de Cantor, con el que se carteó durante 27 años, es el primer autor -junto a éste- en pasar del infinito *en potencia* aristotélico al infinito *en acto.* Ambos encontraron el modo de *definir* el infinito.

Cantor y Dedeking razonaron del modo siguiente: si para contar conjuntos finitos utilizo el emparejamiento, ¿por qué no utilizar este mecanismo con los conjuntos infinitos? De este modo, razona Cantor, si me siento entre dos montones de arena, y tomo con cada mano un grano de cada montón, por muchos granos que haya, si acabo antes el montón de la izquierda que el de la derecha, esto vendrá a decirnos que ese montón tenía menos granos que el otro. Pero si acabo los dos montones a la vez, por fuerza no podremos afirmar sino que los dos montones tenían igual número de granos de arena. Cantor y Dedeking llamarían a este emparejamiento una CORRESPONDENCIA BIUNÍVOCA entre los montones de arena. Hoy lo llamamos igual.

EL TODO Y LAS PARTES

La máxima que mejor recoge la distinción aristotélica sobre lo finito y lo infinito es aquella que afirma que "*EL TODO ES MÁS GRANDE QUE LAS PARTES*". Semejante intuición permaneció aceptada por todos los hombres. Es un asunto de sentido común. En efecto, un grano de arena es menor que el montón en el que se encuentra, dos manzanas son menos que el cesto de manzanas... una mano es menor que todo el cuerpo. Tras Cantor y Dedeking las cosas ya no iban a ser iguales.

Sorprendentemente, observaron que en los conjuntos infinitos existen "*partes*" contenidas en ellos con tantos elementos como "*todo*" el conjunto. Esta propiedad es tan difícil de asumir que adoptaron esta propiedad como la definición de lo que significa que un conjunto tenga *cardinal* infinito.

¿Raro? Mucho. En los diagramas que acompañan este texto puedes comprobar que, si el todo es el conjunto de los números de contar (1,2,3,4...) y que es infinito, el subconjunto de los PARES o los IMPARES o los PRIMOS es tan numeroso como todo el conjunto.

Por supuesto, si un conjunto es finito es válida la máxima aristotélica.

Sin embargo, ésta era sólo la primera de las sorpresas que deparaban estas ideas a Cantor. En la próxima lámina te desvelaremos la continuación de su viaje por el infinito y más allá...

NO LO OLVIDES

>>>En un conjunto infinito, hay *partes* tan numerosas como el mismo.

>>>Los números de contar, los enteros (positivos y negativos), las fracciones, los números pares, los números cuadrados, los primos, etc. tienen todos ellos la misma cantidad de elementos: el número transfinito ALEF-CERO.

>>>Para saber si un conjunto tiene ALEF-CERO elementos hay que emparejar cada uno de sus elementos con un número natural de modo que no quede ninguno sin pareja.

>>>Cuando un conjunto tiene ALEF-CERO elementos, se dice que es NUMERABLE.

>>>Hay conjuntos infinitos con más elementos que ALEF-CERO.

lolitabrain@hotmail.com